

# Modélisations des transferts couplés de matière et de chaleur dans l'absorption gaz-liquide en film ruisselant laminaire

H. LE GOFF,\* A. RAMADANE et P. LE GOFF

Laboratoire des Sciences du Génie Chimique, CNRS—ENSIC—INPL, Nancy, France

(Reçu le 10 Décembre 1984 et sous forme modifiée le 25 Janvier 1985)

**Résumé**—Nous présentons les résultats de l'intégration, par Transformée de Fourier Rapide, des équations différentielles de transferts couplés de matière et de chaleur, dans un film ruisselant en régime laminaire sur une paroi adiabatique. Nous donnons les profils longitudinaux et transversaux de température et de concentration, sur l'exemple de l'absorption de vapeur d'eau dans une solution de bromure de lithium, appliquée à une pompe à chaleur à absorption. Nous transformons ces résultats sous forme de fonctions adimensionnelles générales applicables à d'autres exemples. Ensuite nous proposons une résolution de ce même problème, sous un autre formalisme adimensionnel, par la méthode des différences finies, en distinguant deux cas selon que le profil de vitesse est plat (écoulement piston) ou parabolique. Nous comparons les résultats des trois méthodes.

## INTRODUCTION GENERALE: EXPOSE DU PROBLEME

L'ABSORPTION des gaz et des vapeurs dans les liquides est une opération fréquemment utilisée dans l'industrie chimique. Les contacteurs gaz-liquide généralement utilisés pour l'absorption sont des colonnes à plateaux, à garnissage, à dispersion mécanique d'une phase dans l'autre, etc. [1, 2].

La technique du film mince ruisselant sur une paroi lisse verticale a été peu utilisée. Elle présente cependant un grand intérêt pour les absorptions fortement exo- ou endo-thermiques, car les échanges de chaleur peuvent se faire aisément à travers la paroi, avec un fluide caloporteur circulant sur l'autre face de la paroi. La chaleur dégagée ou absorbée, par la réaction gaz-liquide, crée en effet une variation de température qui modifie, à son tour, l'équilibre entre les deux phases et affecte ainsi le transfert de matière.

Bien entendu, dans de nombreux cas, cet effet thermique est suffisamment faible pour que le processus puisse être considéré comme isotherme. Mais dans le cas général, la modélisation du système devra prendre en compte les transferts simultanés et *couplés* de matière et de chaleur au sein de la phase liquide.

Après les travaux de pionniers de Higbie [3] et de Danckwerts [4–6], un nombre considérable de travaux ont traité de l'absorption de gaz dans les films ruisselants. Certains d'entre eux, notamment Verma et Delancey [7] et Mann et Moyes [8] prennent en compte le phénomène thermique, comme un effet retardateur ou accélérateur, par rapport au transfert de matière, qui est le but principal recherché.

Il existe cependant des cas où c'est le transfert de

chaleur qui est l'objectif même recherché, le transfert de matière n'étant qu'un *moyen* d'obtenir l'effet thermique désiré. Tel est le cas des pompes à chaleur à absorption pour lesquelles la modélisation des transferts couplés de matière et de chaleur dans les films ruisselants a été abordée dans quelques publications récentes [9–18].

L'analyse bibliographique montre qu'à partir d'une certaine valeur du nombre de Reynolds, la surface du film n'est plus lisse, mais couverte d'ondes ou de vagues, dont l'importance et les caractéristiques (amplitude, nombre d'ondes, etc.) varient avec le régime d'écoulement. Ce phénomène, d'ailleurs aléatoire, complique l'approche mathématique de l'hydrodynamique des films ruisselants en présence de vagues. Les travaux de Fulford [19], Seban [20] et Dukler *et al.* [21–24] constituent une analyse détaillée de cette hydrodynamique.

## UN MODELE SIMPLIFIE: ECOULEMENT PISTON

Plaçons nous dans le cas où l'écoulement est laminaire, hydrodynamiquement établi, à épaisseur de film  $\delta$  faiblement variable (Fig. 1), c'est-à-dire à flux de transfert faible. Dans ces conditions, la théorie classique de Nusselt [25] prévoit un profil de vitesse semi-parabolique donné par l'expression :

$$u(y) = \frac{g\delta^2}{2} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{y}{\delta} \right)^2 \right] \quad (1)$$

avec

$$\delta = \left( 3 \frac{\nu^2}{g} \cdot Re \right)^{1/3} \quad (2)$$

Dans un premier modèle, très simple, nous remplacerons ce profil parabolique par un profil plat :

\* Adresse actuelle: Professeur de Génie Chimique au Centre Universitaire de N'Gaoundere (Cameroun).



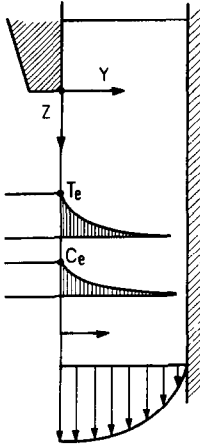


FIG. 1. Allure générale des profils de température, de concentration et de vitesse dans un absorbeur adiabatique à film ruisselant.

et la température  $T_e$  de cette interface sont reliées par l'équation de l'isobare d'ébullition, à la pression de vapeur régnant dans la phase gazeuse. Cette isobare est une courbe dans le diagramme  $T(C)$  (cf. Fig. 2). Mais l'expérience montre que cette isobare peut aisément être linéarisée dans le domaine étudié ; son équation est alors :

$$C_e = AT_e + B \quad (4c)$$

En tête de l'absorbeur ( $Z = 0$ ) la solution liquide entre à la température  $T_1$  et la concentration  $C_1$  :

$$Z = 0 \quad T = T_1 \quad C = C_1. \quad (4d)$$

Nous avons intégré le système d'équations différentielles (3) dans le domaine de Laplace et obtenu les solutions générales suivantes :

$$\begin{aligned} C(s, y) - \frac{C_1}{s} &= \frac{C'_1 - C_1}{s \cdot \gamma(s)} \\ &\times \left( \exp \delta \sqrt{\frac{s}{a'}} - \exp \left[ -\delta \sqrt{\frac{s}{a'}} \right] \right) \\ &\times \left( \exp (y - \delta) \sqrt{\frac{s}{d'}} + \exp (\delta - y) \sqrt{\frac{s}{d'}} \right) \\ T(s, y) - \frac{T_1}{s} &= \frac{T_1 - T'_1}{s \cdot \gamma(s)} r \sqrt{\frac{D}{a}} \\ &\times \left( \exp \delta \sqrt{\frac{s}{d'}} - \exp \left[ -\delta \sqrt{\frac{s}{d'}} \right] \right) \\ &\times \left( \exp (y - \delta) \sqrt{\frac{s}{a'}} + \exp (\delta - y) \sqrt{\frac{s}{a'}} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

où  $C$  et  $T$  sont fonctions de  $y$  et de la variable de Laplace  $s$ .  $C'_1$  et  $T'_1$  sont les valeurs d'équilibre correspondantes à  $C_1$  et  $T_1$ , définies sur la Fig. 2,  $a'$ ,  $d'$  et  $r$  sont des paramètres définis dans la Nomenclature.

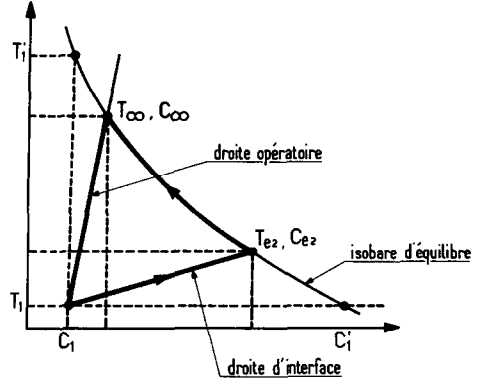


FIG. 2. Représentation dans le diagramme  $T(C)$  de la trajectoire du point d'interface  $T_e(C_e)$  et de la droite moyenne liant le point initial  $(C_1, T_1)$  au point de sortie  $(C_\infty, T_\infty)$  d'un absorbeur adiabatique infiniment long.

La fonction  $\gamma(s)$  est définie comme suit :

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= \left( \exp \delta \sqrt{\frac{s}{d'}} + \exp \left[ -\delta \sqrt{\frac{s}{d'}} \right] \right) \\ &\times \left( \exp \delta \sqrt{\frac{s}{a'}} - \exp \left[ -\delta \sqrt{\frac{s}{a'}} \right] \right) \\ &- r \sqrt{\frac{D}{a}} \left( \exp \delta \sqrt{\frac{s}{d'}} - \exp \left[ -\delta \sqrt{\frac{s}{d'}} \right] \right) \\ &\times \left( \exp \delta \sqrt{\frac{s}{a'}} + \exp \left[ -\delta \sqrt{\frac{s}{a'}} \right] \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Un gros intérêt de la transformée de Laplace est de permettre l'étude du comportement aux limites des solutions, sans les exprimer dans le domaine réel. On calcule ainsi, la limite de  $T$ , pour une longueur  $Z$  infinie, soit :

$$\lim_{Z \rightarrow \infty} T \equiv T_\infty = T_1 + (T'_1 - T_1) \frac{r}{r-1} \quad (7a)$$

et

$$C_\infty = AT_\infty + B. \quad (7b)$$

Cette relation (7) peut encore se mettre sous la forme :

$$\frac{T_\infty - T_1}{C_\infty - C_1} = \frac{r}{A} = \frac{H_d}{C_m \rho}. \quad (8)$$

C'est l'équation de la 'droite opératoire' entre le point initial et le point à l'infini, qui serait atteint au bas d'un film infiniment long (voir Fig. 2).

#### TECHNIQUE D'UTILISATION DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER RAPIDE

Les expressions  $C(s, y)$  et  $T(s, y)$  données par (5) et (6) sont trop compliquées pour être inversées dans le domaine réel grâce à des tables de 'transformée de Laplace inverse'. Nous utilisons donc pour cette opération, la 'Transformée de Fourier Rapide' notée

TFR, qui calcule numériquement pour  $(M + 1)$  valeurs de  $Z$ , la valeur  $T(Z_i, y_0)$ ,  $0 < i < (M + 1)$ .

Le nombre  $M$  de points est fixé par la technique propre à la TFR et la capacité de l'ordinateur (nous avons utilisé  $M = 1024$  points). Nous choisissons une période d'observation du signal  $T(Z)$ , notée  $TPER$ , qui correspond à la longueur  $Z$  sur laquelle est effectuée le calcul des  $M$  points équidistants selon  $Z$ . Pour des raisons propres au calcul, la zone 'utile' de cette période d'observation est limitée à une fraction  $[(f/\tau) \cdot TPER]$ .

$M$  étant fixé, nous pouvons donc choisir :  
— Soit une grande période  $TPER$  avec les  $M$  points espacés, donc une observation générale du profil  $T(Z)$  jusqu'au régime établi à l'infini, mais une faible précision, particulièrement en début de film due à la faible densité linéique des points de calcul.  
— Soit une courte période  $TPER$  avec les  $M$  points rapprochés, donc une observation partielle de la zone d'entrée du film avec une grande précision sur le profil obtenu.

Le calcul ainsi exposé est applicable pour toute valeur de  $y_0$  comprise entre 0 (interface) et  $\delta$  (paroi). Nous avons arbitrairement découpé l'épaisseur du film en  $p$  intervalles ( $p = 8$ ) égaux et avons ainsi calculé  $(p + 1)$  profils verticaux, aux différentes profondeurs de pénétration.

Ayant stocké dans des tableaux de dimension  $(M + 1)$ , les  $(p + 1)$  profils verticaux  $T(Z)$ , nous pouvons rappeler les  $(p + 1)$  valeurs  $T(Z_0, y)$  et tracer à toute côte vertical  $Z_0$ , le profil horizontal de température  $T(y)$ .

A partir de chacun de ces profils, nous calculons ensuite la température moyenne de mélange :

$$\bar{T}(Z_0) = \frac{1}{p + 1} \sum_{k=0}^{k=p} T\left(Z_0, \frac{k\delta}{P}\right) \tag{9a}$$

puis la densité de flux thermique à l'interface :

$$\phi_T(Z_0) = -\lambda \left( \frac{\partial T(Z, y)}{\partial y} \right)_{y=0} \tag{9b}$$

enfin la valeur moyenne de cette densité de flux entre  $Z = 0$  et  $Z = Z_0$  :

$$\bar{\phi}_T(Z_0) = \frac{1}{Z_0} \int_0^{Z_0} \phi_T(Z) dZ. \tag{9c}$$

Toute la démarche exposé ci-dessus pour la diffusion de la chaleur a été transposée au phénomène de diffusion du solvant.

RESULTATS NUMERIQUES:  
UN EXEMPLE TYPIQUE

Données de base

La procédure précédente a été appliquée à titre d'exemple à une solution aqueuse de bromure de lithium, dont les caractéristiques [26–30] sont données dans le Tableau 1.

Le film ruisselant a une épaisseur de  $\sim 0,3$  mm, sa vitesse moyenne d'écoulement 'piston' est :  $u_f \simeq 0,154$

Tableau 1. Exemple chiffré

Solution concentrée d'alimentation :	
$x_1 = 60\%$ LiBr en masse	$C_1 = 662$ kg d'eau/m <sup>3</sup>
$T_1 = 25^\circ\text{C}$	
Valeurs moyennes pour $25 < T < 65^\circ\text{C}$ et $0,55 < x < 0,60$	
$\rho = 1,65 \times 10^3$ kg m <sup>-3</sup> ,	à $60^\circ\text{C}$
$\mu = 3 \times 10^{-3}$ kg m <sup>-1</sup> s <sup>-1</sup> ,	à $60^\circ\text{C}$
$D = 1 \times 10^{-9}$ m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>	
$a = 1,32 \times 10^{-7}$ m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>	

m s<sup>-1</sup>, correspondant à un critère de Reynolds :

$$Re \equiv \frac{u_f \delta}{\nu} \simeq 24,2$$

la pression de vapeur d'eau dans l'enceinte est 25 mm Hg. Dans ces conditions, la température d'équilibre de la solution d'entrée est :

$$T'_1 \simeq 66,3^\circ\text{C} \quad (\text{voir Fig. 2}).$$

Profils de température

Les Figs. 3–6 qui regroupent les résultats des calculs sous forme de réseaux de courbes, appellent les commentaires suivants :

(a) La pénétration de la chaleur, perpendiculairement à l'interface "se fait vite et bien" : ceci se constate sur la Fig. 3 où les profils de température selon  $y$  apparaissent quasi-horizontaux, après un parcours d'une vingtaine de centimètres à partir de la sortie du fluide du distributeur. Ceci apparaît aussi sur la Fig. 4 où les trois profils, à  $y = 0, \delta/2, \delta$  sont presque indiscernables après un parcours de 20–40 cm.

(b) Par contre, le flux global de transfert n'est pas grand: il faut un parcours de l'ordre de 5–10 m pour que la température de la solution ne diffère que de 1°C de sa valeur asymptotique :  $T_\infty = 58,55^\circ\text{C}$ .

(c) Le profil d'interface est légèrement oscillant. C'est un phénomène général que nous rencontrons dans tous les cas étudiés. Il est dû au fait que nous imposons, à l'interface, une violente discontinuité dans les conditions limites: la mise en équilibre *instantanée* de la solution et de la vapeur. La température doit sauter donc 'instantanément' de  $T_1 = 25^\circ\text{C}$  à  $T_{e2} \simeq 37^\circ\text{C}$ , température d'équilibre d'interface initiale. La TFR n'apprécie pas ce genre de discontinuité, elle répond par une oscillation autour du point  $T_{e2}$ , stationnaire, et qui s'amortit plus ou moins rapidement dans la suite du profil suivant le choix des paramètres de calcul ( $TPER, \tau$ ).

Bien que l'observation globale soit très grossière pour la zone d'entrée, nous détectons néanmoins ce point stationnaire ( $T_e - T_1 \simeq 12^\circ\text{C}$ ) sur le profil d'interface, alors que les profils à  $y = \delta/2$  et  $y = \delta$  commencent à  $T(0) = T_1$ .

La Fig. 5 présente les profils verticaux  $C(Z)$  pour neuf profondeurs  $y_0$  équidistantes dans le film. Nous constatons que :

— Le phénomène de diffusion d'eau étant beaucoup

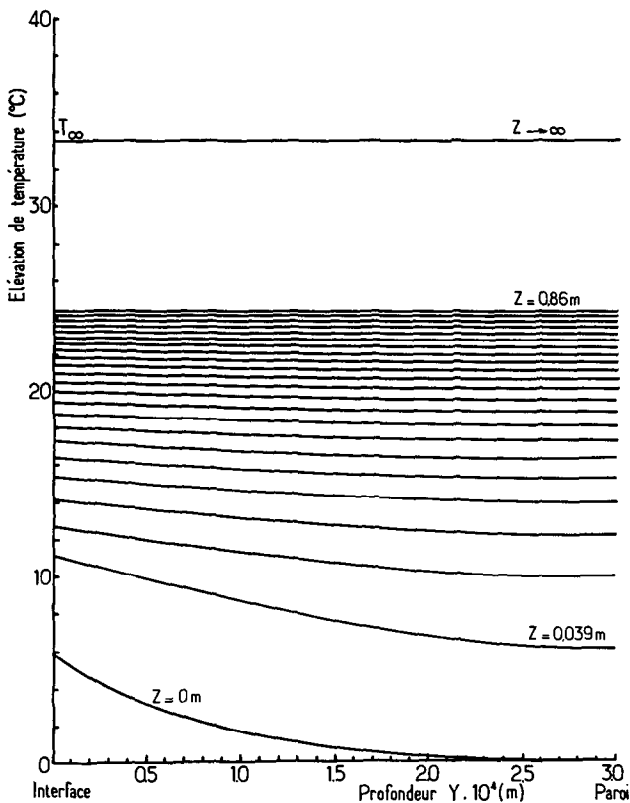


FIG. 3. Profils horizontaux d'élévation de température  $[T(z, y) - T_1]$  vs  $y$ , pour différentes côtes avec un pas  $\Delta Z = 3,9 \times 10^{-2}$  m (conditions opératoires du Tableau 1, avec  $\delta \approx 0,3 \times 10^{-3}$  m).

plus lent que le phénomène thermique, l'échelle d'observation fait apparaître d'importantes différences de comportement entre l'interface, le coeur du film et la paroi.

$y = 0$  (interface) : montée instantanée à la concentration d'équilibre, stationnarité

(accompagnée des inévitables oscillations), puis décroissance asymptotique vers  $C_\infty$ ;

- $0 < y_0 < 3\delta/8$  : croissance, passage par un maximum puis décroissance vers  $C_\infty$ ;
- $3\delta/8 < y_0 < \delta$  : croissance asymptotique vers  $C_\infty$ .

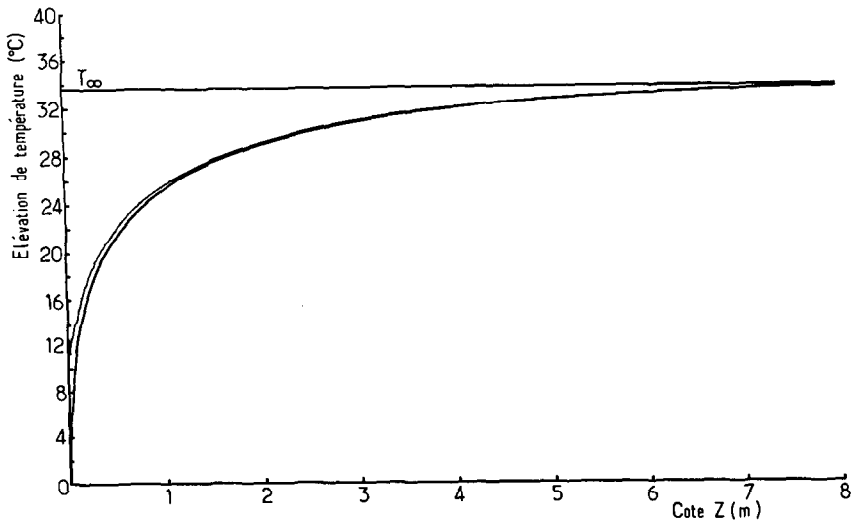


FIG. 4. Profils verticaux d'élévation de température  $[T(z, y) - T_1]$  vs  $Z$  pour trois profondeurs  $y_0 = 0$  (interface),  $y_0 = \delta/2$  (milieu) et  $y_0 = \delta$  (paroi) (conditions opératoires du Tableau 1, avec  $\delta \approx 0,3 \times 10^{-3}$  m).

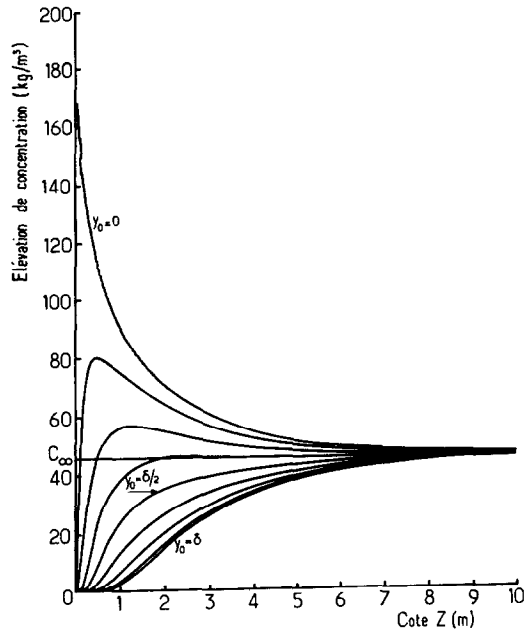


FIG. 5. Profils verticaux d'élévation de concentration d'eau  $[C(z, y) - C_1]$  vs  $Z$ , pour neuf profondeurs  $y_0$  équidistantes  $0 < y_0 < d$  (conditions opératoires du Tableau 1, avec  $\delta \simeq 0,3 \times 10^{-3}$  m).

—La concentration  $C_\infty = 705,9 \text{ kg eau/m}^3$  (correspondant à  $x_\infty = 56,3\%$  masse LiBr) est atteinte par la concentration moyenne du film  $\bar{C}(Z)$  à 1% près pour  $Z = 7,30 \text{ m}$ , mais la dispersion des différents profils par rapport à cette valeur moyenne est environ 5%.

En fait tous les profils convergent vers  $C_\infty$  à moins de 1% près pour une côte  $Z$  supérieure à 10 m, donc en dehors de la zone observée.

La Fig. 6 présente les profils horizontaux  $C(y)$  pour différentes valeurs de  $Z$ , avec un incrément  $\Delta Z = 0,29 \text{ m}$  jusqu'à  $Z = 9,6 \text{ m}$ . Nous constatons que :

—Pour  $Z = 9,60 \text{ m}$ , le régime établi  $C_\infty$  n'est pas tout à fait atteint.

—Les profils successifs selon  $Z$  sont séquentiels (puisque la concentration à l'interface diminue, alors que celle à la paroi augmente), et deviennent quasi-linéaires pour les grandes valeurs de  $Z$ .

—Le découpage de l'épaisseur du film en huit intervalles fait apparaître des discontinuités de pente à chaque point de calcul, phénomène peu gênant qui induit seulement une légère erreur sur le calcul du flux d'interface.

—La 'pénétration du front de concentration' est donc beaucoup moins rapide que le 'pénétration du front de chaleur' (environ 100 fois moins rapide—voir plus loin).

Densité de flux d'interface

La Fig. 7 représente la densité locale de flux thermique  $\phi_T(Z)$  et la valeur de cette densité moyenne entre 0 et  $Z$ ,  $\bar{\phi}_T(Z)$ .

Les oscillations sur la densité locale résultent des oscillations sur les profils  $T(Z)$  d'interface.

La valeur maximale du pic initial n'est pas vraiment significative, car elle dépend du pas de calcul de la TFR. On vérifie aisément, en effet, sur les équations de départ, que l'hypothèse adoptée (à équilibre instantané d'interface) donne en théorie un flux infini quand  $Z$  tend vers 0. On constate que la densité locale diminue rapidement : elle passe de 20 à  $1 \text{ kW m}^{-2}$  en moins d'un mètre.

Trajectoires :  $T(C)$

La Fig. 8 présente en diagramme  $T(C)$  les trajectoires  $(T - T_1) = f(C - C_1)$  pour neuf valeurs de la profondeur  $y_0$  comprise entre 0 et  $\delta$ . Nous constatons que :

—La trajectoire d'interface ( $y_0 = 0$ ) commence par une montée linéaire de l'origine au point stationnaire d'interface. Cette droite a une pente (calculée) d'environ  $0,0670^\circ\text{C m}^3 \text{ kg}^{-1}$ . Nous montrons ailleurs [13, 31] que

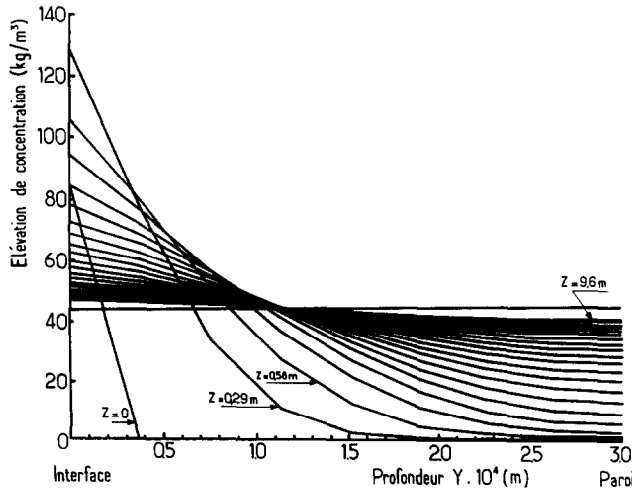


FIG. 6. Profils horizontaux d'élévation de concentration d'eau  $[C(z, y) - C_1]$  vs  $y$ , pour différentes côtes avec  $\Delta Z = 0,29 \text{ m}$  (conditions opératoires du Tableau 1, avec  $\delta \simeq 0,3 \times 10^{-3} \text{ m}$ ).

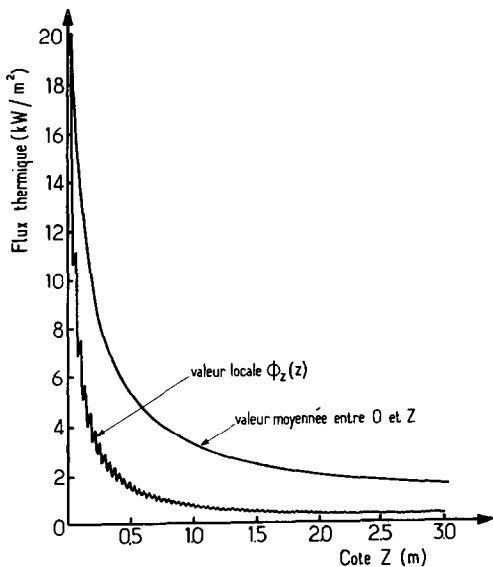


FIG. 7. Profils des densités de flux thermiques d'interface : locale  $\Phi_T(Z)$  et moyenne entre 0 et Z  $\bar{\Phi}_T(Z)$  (conditions opératoires du Tableau 1, avec  $\delta \simeq 0,3 \times 10^{-3}$  m).

cette valeur est égale à  $H_d/\bar{C}_m\rho \sqrt{D/a}$ . Le 1er point de calcul de la TFR (pour  $Z = 0$ ) est situé sur cette droite, ce qui est normal car l'introduction de  $Z = 0$  dans les équations de Laplace menant à une forme indéterminée, il est calculé comme une limite de développements limités au voisinage de zéro.

L'observation globale a un pas de calcul trop grand pour mettre en évidence la stationnarité du point

d'intersection de la droite d'interface et de l'isobare de coordonnées ( $T - T_1 \neq 11,5^\circ\text{C}$ ;  $C - C_1 \neq 160 \text{ kg m}^{-3}$ ).

Les autres trajectoires débutent avec une tangente verticale, due au retard de la diffusion matérielle sur la diffusion thermique. Elles convergent toutes, par des cheminements à concavité variable, vers le point ( $T_\infty$ ,  $C_\infty$ ).

La trajectoire moyenne  $\bar{T}(\bar{C})$  passe par le point ( $C_\infty$ ,  $T_\infty$ ) et tend vers la 'droite opératoire' de pente  $H_d/\bar{C}_m\rho$ , dans sa partie supérieure.

— Courbes 'iso-Z' : si nous identifions sur chaque trajectoire le point correspondant à une cote verticale  $Z_0$ , ces points sont sur une courbe 'iso-Z'. L'exemple tracé correspond à la cote  $Z = 0,78$  m. Le lieu 'iso-Z' apparaît comme une droite horizontale (isotherme) car à cette cote, les profils  $T(y)$  sont quasiment plats.

Notons que cette présentation, un peu brutale, des résultats de l'intégration rigoureuse du système (3) des équations aux dérivées partielles, a l'inconvénient de ne pas nous fournir 'l'explication' de la forme de ces réseaux de courbes. Elle ne nous dit pas *pourquoi* les courbes de la Fig. 6 se croisent et pourquoi celles de la Fig. 5 présentent un maximum ... alors que celles des Figs. 3 et 4 n'ont pas d'anomalies'.

Cependant on montre [14, 31] que l'ensemble de ces questions peuvent être résolues et expliquées en réintégrant le système (3) par une méthode moins rigoureuse, mais plus concrète, plus intuitive. Le principe de cette méthode consiste à suivre par la pensée un globule de solution dès sa sortie de l'ajutage et à mesure qu'il descend dans le film, en absorbant de l'eau et en échangeant de la chaleur avec ses voisins.

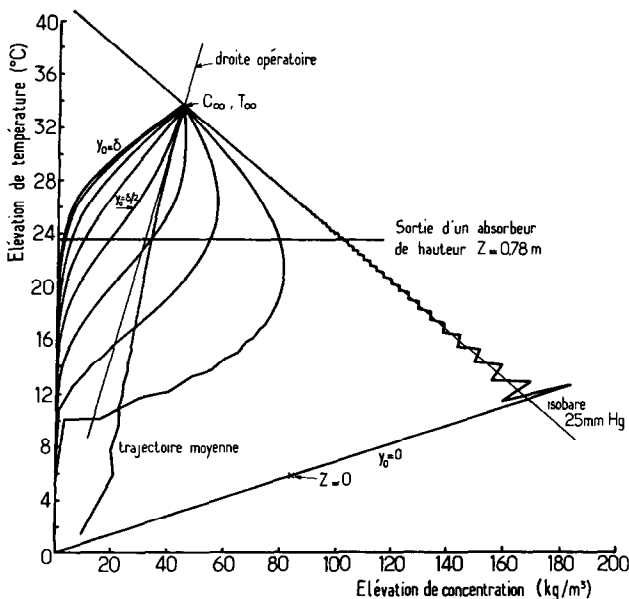


FIG. 8. Trajectoires d'élévation de température  $[T(Z, y) - T_1]$  en fonction de l'élévation de concentration  $[C(Z, y) - C_1]$  pour neuf profondeurs  $y_0$  équidistantes.  $y_0 = 0$  trajectoire du point d'interface;  $y_0 = \delta$  trajectoire du point de paroi; trajectoire moyenne  $\bar{T}(Z) - T_1$  vs  $\bar{C}(Z) - C_1$ ; 'droite opératoire' de pente  $H_d/\bar{C}_m\rho$  liant le point (0,0) au point de sortie ( $C_\infty - C_1$ ,  $T_\infty - T_1$ ) d'un absorbeur infiniment long (conditions opératoires du Tableau 1, avec  $\delta \simeq 0,3 \times 10^{-3}$  m).

## PRESENTATION ADIMENSIONNELLE GENERALE DES RESULTATS

### Formalisme adimensionnel

Les variations verticales et transversales de température et de concentration, présentées dans les Figs. 3–6 étaient relatives à un couple de fluide donné et à des conditions hydrodynamiques données. Afin d'éviter un nouveau passage sur ordinateur, à chaque fois que l'on change, ne serait-ce qu'une seule de ces données, nous avons déterminé les solutions générales du système d'équations différentielles (3) sous une forme adimensionnelle, qui soit aussi indépendante que possible des données du problème. Les grandeurs adimensionnelles utilisées sont les suivantes :

la côte réduite :

$$Z^+ = Z/(\delta \cdot Re) \quad (10a)$$

la profondeur réduite :

$$y^+ = y/\delta \quad (10b)$$

l'efficacité thermique :

$$\eta_T(Z, y) = \frac{T(Z, y) - T_1}{T'_1 - T_1} \quad (10c)$$

dont la valeur moyenne à la côte  $Z$  est :

$$\bar{\eta}_T(Z) = \frac{\bar{T}(Z) - T_1}{T'_1 - T_1}$$

l'efficacité matérielle :

$$\eta_M(Z, y) = \frac{C(Z, y) - C_1}{C'_1 - C_1} \quad (10d)$$

avec

$$\bar{\eta}_M(Z) = \frac{\bar{C}(Z) - C_1}{C'_1 - C_1}$$

le nombre de Nusselt local :

$$Nu(Z) = \frac{h(Z) \cdot \delta}{\lambda} \quad (10e)$$

avec

$$h(Z) = \phi_T(Z)/(T'_1 - T_1). \quad (10f)$$

La valeur moyenne du nombre de Nusselt est :

$$\bar{Nu}(Z) = \frac{\bar{h}(Z)\delta}{\lambda} = \frac{\bar{\phi}_T(Z) \cdot \delta}{(T'_1 - T_1)}. \quad (10g)$$

### Nota

On notera que les conductances, et donc aussi les nombres de Nusselt sont définis par référence à l'écart à 'la température d'équilibre initiale'.

Une autre définition possible consisterait à définir la conductance locale, par référence à l'écart à la température locale, soit :

$$h'(Z) = \frac{\phi_T(Z)}{\bar{T}(Z) - T_1} \quad \text{et} \quad Nu'(Z) = \frac{\phi_T(Z) \cdot \delta}{[\bar{T}(Z) - T_1]\lambda}. \quad (11)$$

Ces grandeurs ne sont pas indépendantes de celles définies plus haut. On a en effet :

$$\bar{\eta}_T(Z) \cdot h'(Z) = h(Z) \quad \text{et} \quad \bar{\eta}_T(Z) \cdot Nu'(Z) = Nu(Z) \quad (12)$$

mais elles sont d'un emploi moins commode.

Avec ces nouvelles grandeurs, le diagramme  $T(C)$  de la Fig. 2 devient un diagramme adimensionnel constitué d'un triangle rectangle isocèle comme illustré par la Fig. 9 :  $\eta_T$  est porté en fonction de  $\eta_M$ , l'hypothénuse est l'isobare d'équilibre, la 'droite opératoire'  $\bar{\eta}_T(\bar{\eta}_M)$  a pour pente  $-r = -A Hd/C_m \rho$ , alors que la 'droite d'interface' reliant les points  $(\bar{\eta}_M, \bar{\eta}_T)$  et  $(\eta_{M\infty}, \eta_{T\infty})$  admet une pente légèrement variable.

Ce diagramme a l'avantage d'être *unique* et *universel*.

Les efficacités  $\eta_T$  et  $\eta_M$  sont fonctions croissantes de la côte réduite  $Z^+$  et atteignent asymptotiquement leurs valeurs limites :

$$\eta_{T\infty} = \frac{r}{r-1} \quad \eta_{M\infty} = \frac{1}{1-r} \quad (13)$$

pour  $Z^+$  infiniment grand. D'autre part les nombres de Nusselt local et moyen tendent vers zéro pour  $Z^+$  infiniment grand.

### Expressions approximées des résultats

Nous avons calculé les valeurs numériques des fonctions  $\bar{\eta}_T(Z^+)$ ,  $\bar{\eta}_M(Z^+)$  et  $\bar{Nu}(Z^+)$  d'une part pour  $TPER = 20$  et  $\tau = 10$ , utilisables pour les grandes valeurs de  $Z^+$ , d'autre part pour  $TPER = 3$  et  $\tau = 0, 1$  utilisables pour les petites valeurs de  $Z^+$ . Afin d'en faciliter une exploitation rapide et approximative, nous proposons les expressions suivantes, obtenues par une régression linéaire basée sur la méthode des moindres carrés.

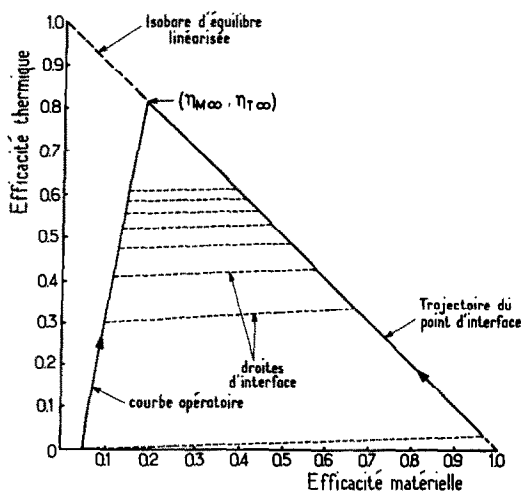


FIG. 9. Représentation de la trajectoire moyenne, de celle du point d'interface et des droites d'interface dans le diagramme universel : efficacité thermique  $\eta_T$  en fonction de l'efficacité matérielle  $\eta_M$ .



*Efficacité thermique.*  
pour

$1 < Z^+ < 110$

$$\bar{\eta}_T/\eta_{T\infty} = 1 - 0,867 \exp [-0,0169 Z^+ + 6,2 \times 10^{-5} Z^{+2}]$$

$110 < Z^+ < \infty$

$$\bar{\eta}_T/\eta_{T\infty} = 1 - 0,445 \exp [-0,0038 Z^+]. \quad (14)$$

*Efficacité matérielle.*

$1 < Z^+ < 150$

$$\bar{\eta}_M/\eta_{M\infty} = 1 - 0,509 \exp [-7,08 \times 10^{-3} Z^+]$$

$150 < Z^+ < \infty$

$$\bar{\eta}_M/\eta_{M\infty} = 1 - 0,334 \exp [3,47 \times 10^{-3} Z^+]. \quad (15)$$

*Nombre de Nusselt moyen.*

$1 < Z^+ < 150$

$$\frac{1}{\overline{Nu}} = 125 - 122,3 \exp [-9,23 \times 10^{-4} Z^+]$$

$150 < Z^+ < \infty$

$$\frac{1}{\overline{Nu}} = 125 - 124,3 \exp [-0,001 Z^+]. \quad (16)$$

Ces fonctions sont d'usage général:

Elles ne dépendent pas de l'hydrodynamique de l'écoulement, dans la mesure, bien sûr, où l'hypothèse de l'écoulement laminaire-piston est respectée (soit pour  $Re \lesssim 400$ ).

Elles impliquent toutefois que, dans le domaine d'utilisation :

— les paramètres physiques du couple ( $\rho, C_m, \mu, a, D$ ) ne subissent pas de grandes variations ;

— l'isobare d'équilibre réel puisse être linéarisée dans le domaine étudié ;

— la pente  $A$  de ces isobares reste constante (indépendante de la pression).

La Fig. 10 présente l'algorithme d'utilisation des fonctions adimensionnelles, c'est-à-dire la démarche à suivre pour calculer les profils de température, de concentration et de flux de transfert, dans un film absorbant quelconque.

**RESOLUTION PAR LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES**

Nous avons utilisé la méthode des différences finies (D.F.) pour obtenir plus de précision dans certains calculs, tout en gardant rigoureusement les mêmes contraintes et les mêmes approximations, notamment l'écoulement piston. Nous avons ainsi déterminé les droites d'interface de la figure (9) et calculé leur pente en fonction de la côte réduite :

$$Z^* = \frac{Z}{\delta \cdot Pe}. \quad (17)$$

Cette pente est représentée sur la Fig. 11. On constate qu'elle passe par un maximum, approximativement égal à  $-r \cdot Le^{2/3}$ .

Nous avons d'autre part recalculé, par cette méthode, les efficacités thermique et matérielle en fonction de la cote réduite  $Z^*$ . Nous avons ainsi confirmé et précisé les résultats de la TFR, à savoir :

Pour  $Z^* \geq 10$ , les trois températures, d'interface, de coeur et de paroi deviennent indiscernables (cf. Fig. 4).

Le retard de la pénétration du front de concentration par rapport à celle du front de température, est mesuré

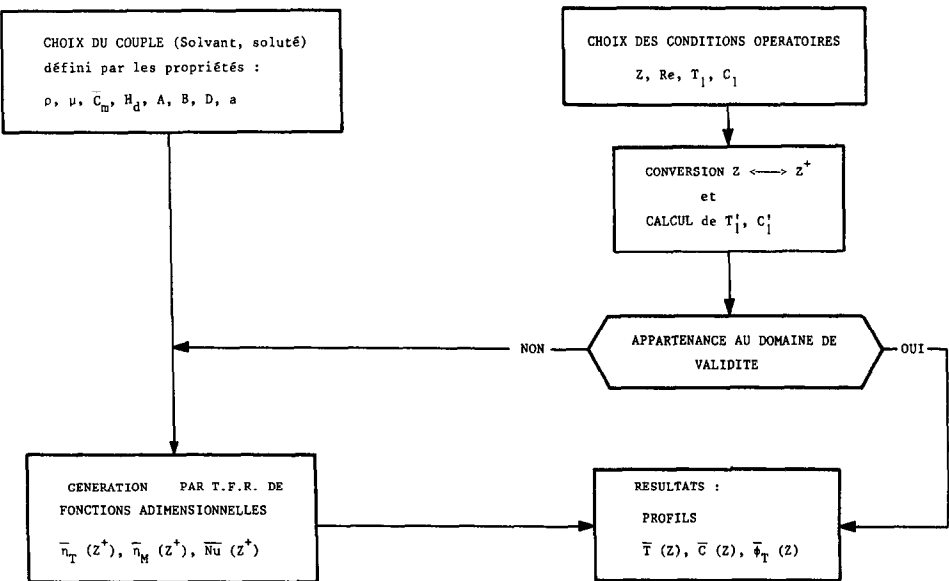


FIG. 10. Algorithme général de génération par TFR de fonctions adimensionnelles et de leur utilisation.

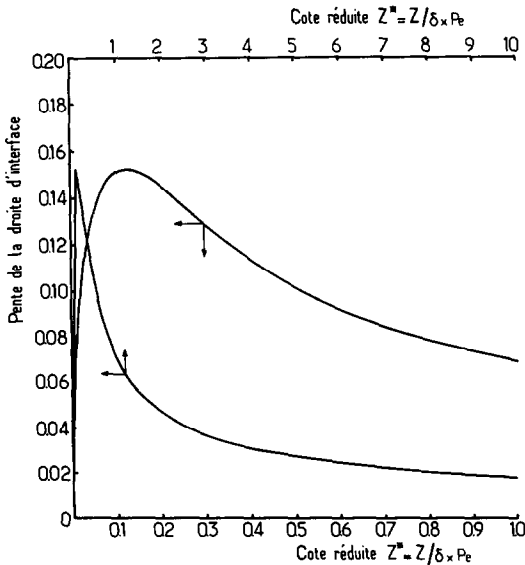


FIG. 11. Variation de la pente de la droite d'interface  $(\eta_{T_c} - \eta_{T_e})/(\eta_{M_c} - \eta_{M_e})$  en fonction de la cote réduite  $Z^*$  pour  $0 < Z^* < 1$  et  $0 < Z^* < 10$ .

par le rapport  $Z_M/Z_T$  où  $Z_M$  et  $Z_T$  sont les cotes auxquelles, respectivement, le front de concentration et le front de température atteignent la paroi (à 0,1% près). Dans l'exemple type du Tableau 1, on trouve :

$Z_T^* = 0,054$  soit  $Z_T = 5,3$  mm  
 $Z_M^* = 5,75$  soit  $Z_M = 600$  mm

soit un rapport :  $Z_M/Z_T = 105$ , ce qui confirme la valeur obtenue par TFR.

UN MODELE PLUS RIGOREUX: ECOULEMENT A PROFIL PARABOLIQUE

Remplaçons maintenant, dans les équations différentielles (3) la vitesse constante  $u_f$ , par une vitesse variable, en fonction de  $y$ , selon la relation parabolique (1). Nous avons intégré ce nouveau système d'équations par la méthode des différences finies en conservant les changements de variable (10b), (10c), (10d) (17) et en adoptant la vitesse réduite :

$$u^+(y) \equiv \frac{u(y)}{u_f}$$

Nous avons comparé les résultats obtenus pour un écoulement piston (par les deux techniques : TFR et D.F.) et ceux obtenus pour un écoulement à profil parabolique (technique D.F.). A titre d'exemple, la Fig. 12 regroupe les trois profils de l'efficacité thermique moyenne, en fonction de la cote réduite  $Z^*$ .

- Cette figure appelle les commentaires suivants :
- Les trois profils convergent vers la même limite  $\eta_{T\infty}$ .
  - Pour une cote  $Z^*$  donnée, l'efficacité thermique calculée dans l'hypothèse simplificatrice de

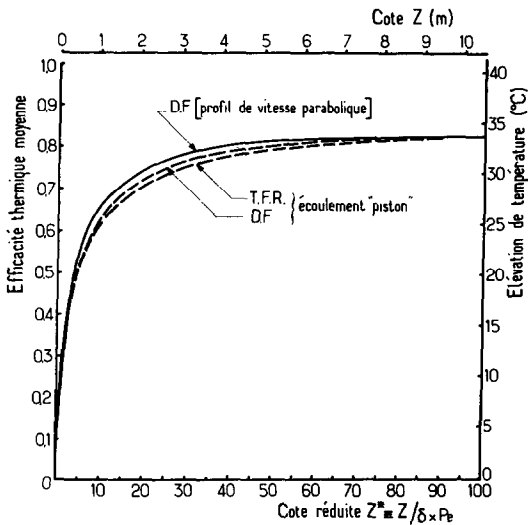


FIG. 12. Comparaison des profils verticaux de l'efficacité thermique moyenne pour un écoulement piston (par TFR et D.F.) et pour un profil de vitesse parabolique (par D.F.). Les axes d'élévation de température  $(\bar{T} - T_1)$  et de la cote  $Z$  correspondent à un film d'épaisseur  $\delta \approx 0,3 \times 10^{-3}$  m.

- l'écoulement-piston est *toujours inférieure* à celle calculée dans l'hypothèse rigoureuse du profil parabolique de vitesse, et ceci pour les deux procédés de calcul.
- Ainsi pour une même valeur de l'efficacité thermique moyenne, la TFR et la méthode des différences finies appliquées à un écoulement piston surestiment la cote  $Z^*$  respectivement d'environ 30 et 20%.
  - Enfin, pour avoir une idée sur l'ordre de grandeur des variables adimensionnelles, nous avons porté sur la Fig. 12 deux axes pour la cote  $Z$  et l'élévation de température  $(\bar{T} - T_1)$  correspondants à l'exemple numérique du Tableau 1.

APPLICATION: INFLUENCE DES PARAMETRES OPERATOIRES

Appliquons la méthode des fonctions adimensionnelles à l'exemple numérique présenté dans le Tableau 1, et dans lequel nous faisons varier soit le débit de solution, soit sa température d'entrée, tous autres paramètres restant constants.

Influence du débit de solution

La Fig. 13 montre l'influence de la variation du nombre de Reynolds sur la température de sortie de la saumure, ainsi que sur la densité moyenne du flux thermique.

Afin de tester la validité de la méthode des fonctions adimensionnelles, nous avons simultanément recherché les résultats par un passage complet de la TFR pour chaque valeur de  $Re$ . On observe une très bonne adéquation pour les températures de sortie et une divergence pour les flux thermiques qui atteint 23%

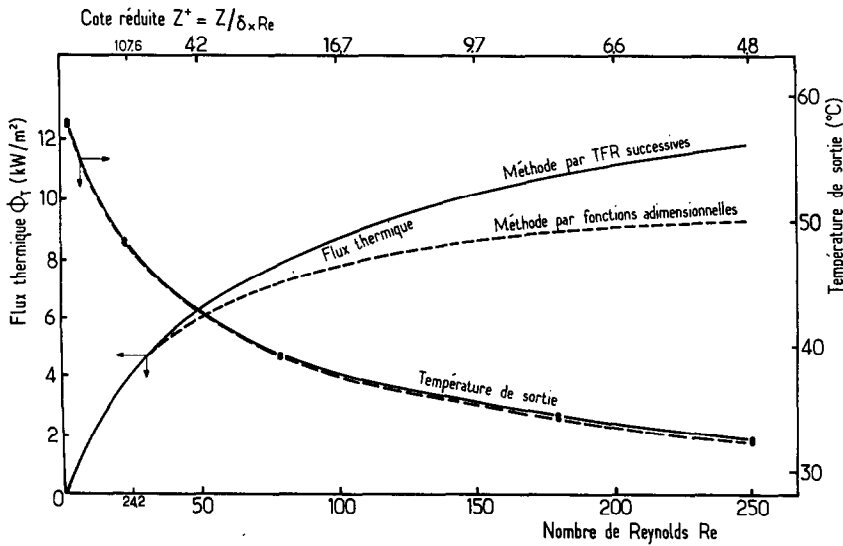


FIG. 13. Influence du nombre de Reynolds sur la densité de flux thermique  $\Phi_T$  et la température de sortie d'un absorbeur adiabatique de hauteur  $Z = 0,78$  m. Comparaison entre la méthode par TFR successives et la méthode par fonctions adimensionnelles (conditions opératoires du Tableau 1).

pour  $Re = 250$ . Cette divergence vient du fait que les fonctions adimensionnelles ont été calculées avec le couple:  $TPER = 20$  et  $\tau = 10$ . Pour  $Re \gtrsim 100$ , il faudrait utiliser un couple plus adapté, par exemple:  $TPER = 50$  et  $\tau = 5$ .

*Influence de la température d'entrée de la solution*

Considérons un film ruisselant caractérisé par  $Re = 24,2$  et une hauteur  $Z = 0,78$  m il vient  $Z^+ = 107,6$  d'où nous déduisons les valeurs moyennes à la sortie de l'absorbeur de l'efficacité thermique et du nombre de Nusselt, soit :

$$\bar{\eta}_T = 0,572 \quad \text{et} \quad \bar{Nu} = 0,071.$$

Faisant varier la température d'entrée  $T_1$ , les expressions de la température de sortie et de la densité de flux thermique moyen sont respectivement :

$$\bar{T}|_{Z=0,78\text{ m}} = T_1 + \bar{\eta}_T(T'_1 - T_1) \quad (18a)$$

$$\bar{\phi}_T|_{Z=0,78\text{ m}} = \bar{Nu} \frac{\lambda}{\delta} (T'_1 - T_1). \quad (18b)$$

Nous parvenons à ce résultat extrêmement simple, et assez imprévu, que la température de sortie est une fonction linéaire croissante de  $T_1$  et la densité de flux  $\bar{\phi}_T$  est une fonction linéaire décroissante de  $T_1$  (cf. Fig. 14).

On constate que l'élévation de température de la solution et la densité de flux thermique décroissent

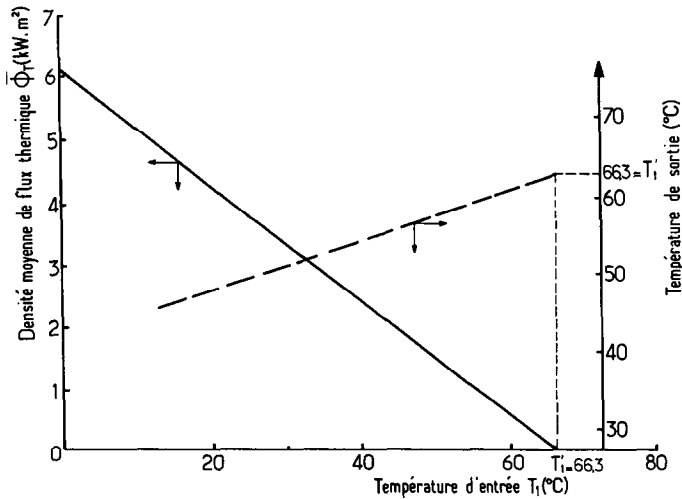


FIG. 14. Influence de la température d'entrée de la solution sur la densité moyenne de flux thermique  $\bar{\Phi}_T$  et la température de sortie d'un absorbeur adiabatique de hauteur  $Z = 0,78$  m. (conditions opératoires du Tableau 1, avec  $\delta \approx 0,3 \times 10^{-3}$  m).

quand  $T_1$  augmente pour s'annuler quand  $T_1 = T'_1$ , c'est-à-dire quand le film de solution est introduit bouillant.

### CONCLUSION

Dans cet article nous avons présenté une méthodologie générale de modélisation des transferts couplés de matière et de chaleur dans un absorbeur adiabatique à film ruisselant laminaire. Les résultats obtenus pour les deux cas où l'écoulement est supposé piston ou à profil de vitesse parabolique sont concordants.

D'autre part l'approche du problème par un formalisme adimensionnel présente un intérêt important pour la simulation des absorbeurs adiabatiques à film ruisselant. Compte tenu de ce qui précède, on peut se contenter dans le cas du couple  $H_2O/LiBr$ , des expressions empiriques (14)–(16).

Parmi les hypothèses de base de cette modélisation, nous avons supposé les propriétés du couple constantes. Il est possible alors de prendre leurs valeurs moyennes. Cependant, il est à noter que les lois de variation des diffusivités  $a$  et  $D$  en fonction de  $T$  et  $C$  sont très mal connues, ou même inexistantes.

La Fig. 14 montre comment varient un facteur de qualité (la température de sortie) et un facteur de quantité (le flux thermique) en fonction d'un paramètre de décision (la température d'entrée). Ce résultat sera la base de la recherche du 'meilleur' compromis, dans l'optimisation technico-économique d'une pompe à chaleur, que nous développerons dans une publication ultérieure [32].

### REFERENCES

- G. Wild, N. Midoux et J. C. Charpentier, *Energetique Industrielle*, Tome 3, Chap. XVII. Technique et Documentation, Paris (1982).
- J. C. Charpentier et G. Wild, Absorption avec réaction chimique, *Techn. Ing. J.* 2640, p. 1–16 (12) (1983).
- R. Higbie, The rate of absorption of a pure gas into a still liquid during short periods of exposure, *Trans. AIChE* 35, 365–389 (1935).
- P. V. Danckwerts, Significance of liquid-film coefficients in gas absorption, *Ind. Engng Chem.* 43, 1460 (1951).
- P. V. Danckwerts, Temperature effects accompanying the absorption of gases in liquids, *Appl. Sci. Res.* A3, 385 (1953).
- P. V. Danckwerts, *Gas-Liquid Reactions*. McGraw-Hill New York (1970).
- L. Verma and G. Delancey, Thermal effects in gas absorption *A.I.Ch.E. J* 21, 96–102 (1975).
- R. Mann and H. Moyes, Exothermic gas absorption with chemical reaction, *A.I.Ch.E. J* 23, 17–23 (1977).
- V. Ye Nakoryakov et N. I. Grigoryeva, Etude expérimentale de l'absorption non-isotherme dans un film ruisselant (en Russe), *Theor. Fond. chem. Technol.* 14, 755 (1980).
- V. Ye Nakoryakov et N. I. Grigoryeva, Transferts simultanés de chaleur et matière dans la zone d'entrée d'un film ruisselant en absorption non-isotherme, *Theor. Fond. chem. Technol.* 14, 483 (1980); original en russe, traduit en anglais dans *Heat Transfer—Sov. Res.* 12, No. 3, (1980).
- V. Ye Nakoryakov et N. I. Grigoryeva, Transferts simultanés de chaleur et matière lors de l'absorption dans des gouttes et des films (en Russe), *Ing. Phys. J.* 32, 399 (1977).
- V. Ye Nakoryakov et N. I. Grigoryeva, Une solution exacte du problème de transfert simultané de chaleur et matière dans l'absorption en film, (en Russe) *Ing. Phys. J.* 33, 893 (1977).
- H. Le Goff, Thèse de Docteur-Ingénieur, INPL Nancy (1983).
- P. Le Goff et H. Le Goff, Colloque International, La Technique du Film appliquée aux Opérations du Génie Chimique, Rueil-Malmaison (Avril 1983).
- G. Grossman, Simultaneous heat and mass transfer in film absorption under laminar flow, *Int. J. Heat Mass Transfer* 26, 357–371 (1983).
- G. Grossman and M. T. Heath, Simultaneous heat and mass transfer absorption of gases in turbulent liquid films, *Int. J. Heat Mass Transfer* 27, 2365–2376 (1984).
- P. D. Iedema, Thesis, Technische Hogeschool-Delft, Netherlands (1984).
- M. L. King, Absorption of water vapor into aqueous salt solutions. Ph.D. thesis, University of Delaware (1981).
- G. D. Fulford, The flow of liquids in thin films. In *Advances in Chemical Engineering*, Vol. 5, pp. 151–236. Academic Press, New York (1964).
- R. A. Seban, Transport to falling films. *Proc. 6th Int. Heat Transfer Conference*, Toronto, pp. 417–428 (1978).
- J. J. Chu and A. E. Dukler, Statistical characteristics of thin, wavy films. II—Studies of the substrate and its wave structure, *A.I.Ch.E. J* 20, 695 (1974).
- K. J. Chu and A. E. Dukler, Statistical characteristics of thin, wavy films. III—Structure of the large waves and their resistance to gas flow, *A.I.Ch.E. J* 21, 583–593 (1975).
- A. S. Telles and A. E. Dukler, Statistical characteristics of thin vertical wavy liquid films, *Ind. Engng chem. Fund.* 9, 412 (1970).
- A. E. Dukler, Dynamics of vertical falling films systems, *Chem. Engng Prog.* 55, 62 (1959).
- W. Nusselt, Die Oberflächen Kondensation des Wasserdampfes, *Z. Ver. dt. Ing.* 60, 541–575 (1916).
- Gmellins *Handbuch*. Verlag Chemie, GMBH, Berlin (1960).
- T. Uemura and S. Hasaba, Studies on the lithium bromide-water absorption refrigerating machine, *Tech. Rep. Kansai Univ.* 6, 31–55 (1964).
- H. Lower, Thèse de Docteur-Ingénieur, Karlsruhe (1960).
- L. A. McNeely, Thermodynamic properties of aqueous solutions of LiBr, *ASHRAE Trans.* No. 3, 413–434 (1979).
- D. R. Wendel and J. Biermann, *Solid Absorbents, High Latent Heat Refrigerants*. Carrier Corporation, New York (1978).
- H. Le Goff, P. Le Goff et A. Ramadane, *Int. J. Heat Mass Transfer* (soumis pour publication).
- A. Ramadane, P. Le Goff et H. Le Goff, Comparaison énergétique et technico-économique des différents types d'absorbeurs à film ruisselant pour pompes à chaleur (à paraître).

### MODELING OF SIMULTANEOUS HEAT AND MASS TRANSFER IN GAS-LIQUID ABSORPTION IN A LAMINAR FALLING FILM

**Abstract**—The results of the integration, by Fast Fourier Transformation, of partial differential equations are presented for coupled heat and mass transfer, in a laminar falling film on an adiabatic wall. We give the transversal and longitudinal profiles of temperature and concentration for the example of the absorption of water vapor in a lithium bromide solution for the application of an absorption heat pump. We transform these results into general dimensionless functions which are applicable to other examples. Afterwards we propose a resolution of the same problem, using another dimensionless formulation, by the finite difference approximation, for the two cases corresponding to 'plug flow' and a parabolic velocity profile. The results of the three methods are compared.

### MODELISIERUNG DES WÄRME- UND STOFFTRANSPORTS BEI ABSORPTION IN EINEM LAMINAREN RIESELFILM

**Zusammenfassung**—Es werden die Ergebnisse der Integration von partiellen Differentialgleichungen des Wärme- und Stofftransports in einem laminaren Riesel Film an einer adiabatischen Wand mit Hilfe der schnellen Fourier-Transformation präsentiert. Die Temperatur- und Konzentrationsprofile in Längs- und Querrichtung werden für das Beispiel der Wasserdampf-Absorption in einer Lithiumbromidlösung im Anwendungsfall einer Absorptionswärmepumpe gezeigt. Die Ergebnisse werden auf die Form dimensionsloser Funktionen gebracht, die allgemein anwendbar sind. Im Anschluss wird eine weitere Lösung des selben Problems in einer anderen dimensionslosen Schreibweise mit Hilfe der Methode endlicher Differenzen für die zwei Fälle einer Pfropfströmung und eines parabolischen Geschwindigkeitsprofils vorgeschlagen. Die Ergebnisse der drei Methoden werden verglichen.

### МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОВРЕМЕННОГО ТЕПЛО-И МАССОПЕРЕНОСА ПРИ ГАЗОЖИДКОСТНОЙ АБСОРБЦИИ В ЛАМИНАРНОЙ СТЕКАЮЩЕЙ ПЛЕНКЕ

**Аннотация**—Представлены результаты интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных с помощью метода быстрого преобразования Фурье для совместного тепло-и массопереноса в ламинарной стекающей пленке на адиабатической стенке. Даны поперечные и продольные профили температуры и концентрации, например, абсорбции водяного пара в растворе бромида лития в применении к абсорбционному тепловому насосу. Результаты представлены в общем безразмерном виде и применимы к другим задачам. В другой безразмерной постановке предложено решение этой же задачи конечно-разностным методом для двух случаев, соответствующих постоянному по сечению значению скорости (пробковый режим течения) и параболическому профилю скорости. Дано сравнение результатов всех трех методов.